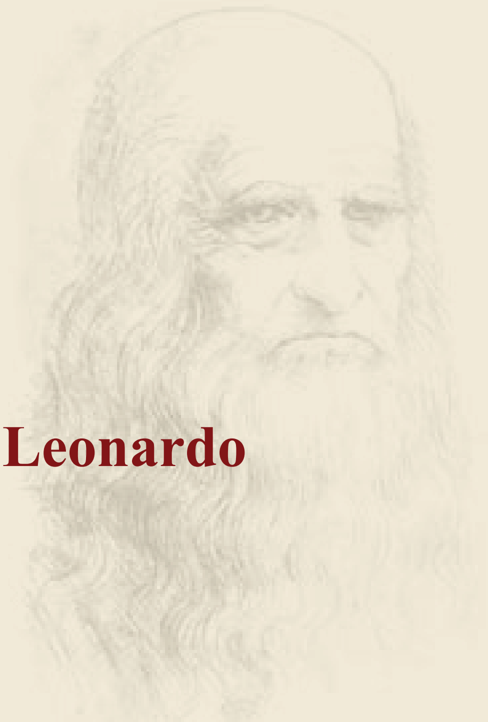
Augusto Marinoni



L'aritmetica di Leonardo

In: "Periodico di Matematiche", Bologna, 1968, serie IV, vol. XLVI, n.5 dicembre, pp. 543-558

In: “Periodico di Matematiche”, Bologna, 1968, serie IV, vol. XLVI, n.5 dicembre pp. 543-558

L’aritmetica di Leonardo

Nella configurazione del «mito» di Leonardo, quale si è determinato alla fine dello scorso secolo, la matematica non occupa il primo posto. Ciò non toglie che tra i lodatori, che non si curano di documentare le proprie affermazioni, sia consueta l’inclusione della matematica tra le infinite specializzazioni scientifiche dell’ «omo sanza lettere». Essi pensano evidentemente a certe solenni affermazioni di Leonardo: «Nessuno mi legga che non è matematico nelli mia principi» (Qu IV 14v). «Nessuna certezza è dove non si pò applicare una delle scienze matematiche» (G 96v). Quest’ultima frase sembra ricalcare perfettamente quella di Nicolò da Cusa: «Nihil certi habemus in nostra scientia nisi nostram mathematicam»; della prima conosciamo solo oggi il preciso significato. Accingendosi a scrivere un nuovo Trattato delle Pittura Leonardo ha innanzi a sé i precedenti Trattati di Leon B. Alberti e di Piero della Francesca i quali impostano il loro discorso sui «principi» o definizioni di punto, linea, superficie, comuni alla geometria e alla prospettiva, la grande scoperta del secolo, resa possibile però dai filosofi che nei due secoli precedenti avevano trasformato l’ottica da scienza metafisica a scienza puramente matematica. Orbene l’Alberti e Piero, dovendo parlare a pittori e non a filosofi, adottano pietosamente delle definizioni empiriche. Leonardo invece, asserendo polemicamente che la pittura è scienza, elabora faticosamente delle definizioni o «principi» di punto, linea, superficie, che vorrebbero essere assolutamente scientifiche[1]. Ciò tuttavia non significa che Leonardo sia stato un esperto nel calcolo o che conoscesse profondamente le dottrine dei matematici del tempo suo. E. Troilo nella sua iperbolica interpretazione del pensiero filosofico di Leonardo contrappone la matematica vinciana a quella di Pitagora, Platone e dei Neoplatonici: «Quella è essenzialmente metafisica e perfino teologica ... la matematica leonardiana invece come quella che fra poco la seguirà gloriosamente, di Galileo, è scientifica».[2] Il che è vero, come è vero che il modesto far di conto del1a scuola elementare è scientifico e non teologico: ma sembra addirittura proporre, senza alcun senso delle proporzioni, un confronto tra Pitagora, Platone ecc. da una parte e Leonardo dall’altra.

Nella schiera degli studiosi che sentono l’elementare dovere di documentare le loro dichiarazioni, il discorso sulla matematica vinciana non è mai stato né ampio né sicuro. Il maggiore di essi perché esperto matematico e leonardista, è R. Marcolongo, i1 quale, dopo aver deplorato che pochissimi avessero studiato «i1 ricco materiale sparso nei manoscritti vinciani che riguarda

---

1 Ulteriori notizie su questo argomento in A. MARINONI. *L’essere del nulla.* In «Rinascimento». 1960

2 E. TROILO, *Ricostruzione e interpretazione del pensiero filosofico* di *Leonardo da* Vinci, «Memorie dell’Istit. Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Classe di Sc. Morali e Lettere", voI. XXXI, fasc. I, Venezia 1954, p. 126.

In: “Periodico di Matematiche”, Bologna, 1968, serie IV, vol. XLVI, n.5 dicembre pp. 543-558

la matematica pura ed... esaminato storicamente e con moderno spirito critico il contributo arrecato a questa scienza e le stesse conoscenze matematiche di Leonardo», studiò criticamente molti passi vinciani connessi colla matematica. , illuminandone alcuni ma sorvolando su altri e giungendo a conclusioni fervidamente ammirative, che non possiamo sottoscrivere senza riserve. D’altra parte nonostante il suo desiderio di scoprire nuove ... scoperte leonardiane, egli dovette ammettere che Leonardo «non fu un matematico di professione», che certi suoi calcoli rivelano incertezze, che praticamente ignora l’algebra, giacché risolve equazioni lineari «per via tutt’altro che algebrica, e poi in qualche caso più complesso erra», e che infine «non si occupa che di geometria»[3].

Nei «Colloques internationaux», tenuti a Parigi nel 1952 dal «Centre National de la Recherche scientifique», R. Sergescu[4], pur seguendo la falsariga degli studi del Marcolongo, conclude essere «extremement difficile et hasardeux de porter un jugement sur l’oeuvre mathématique de Léonard, car il n’en a pas donné une rédaction définitive». Ma ciò implica un presupposto troppo infido, e cioè che Leonardo pensasse a una redazione definitiva. Di che cosa? Un trattato di matematica pura? Ipotesi gratuita, derivata da un vieto pregiudizio che vuol scoprire in ogni scritto vinciano la preparazione di chissà quanti «trattati». Il Sergescu conferma le limitazioni già ammesse dal Marcolongo, ma cita senza una conveniente reazione il passo in cui Leonardo (L 10v) dichiara falso il risultato della divisione $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}$; anzi, dice il Sergescu, «il demontre que le résultat ne saurait être $\frac{8}{9}$ ». Anche il bilancio steso da U. Cisotti[5] è modesto: le conoscenze di Leonardo «si limitano alla geometria; dell’algebra non sembra che Leonardo si sia occupato … ma anche le cognizioni geometriche non sono molto avanzate e pare non oltrepassino le nozioni euclidee del tempo».

In sostanza i due ultimi studiosi riassumono il pensiero del Marcolongo liberandolo però dall’entusiasmo un po’ cieco, che fu di quella generazione e che oggi sembra ereditato solo dai non specialisti. Ora noi vorremmo, lasciata da parte la geometria che richiederebbe più lungo discorso, esaminare con attenzione e senza pregiudizi, alcuni documenti che illustrano le conoscenze di Leonardo nell’ambito della sola e semplice aritmetica[6].

---

[3] Tra i numerosi scritti del MARCOLONGO mi riferisco in particolare a *Le ricerche geometriche-meccaniche di Leonardo da Vinci*, in «Atti della Società italiana delle Scienze", Roma 1929; cfr. pure in *Leonardo da Vinci Artista-scienziato.* Milano 1939, il cap. VIII «Il paradiso delle matematiche», nonché *Leonardo matematico,* in «L’ingegnere", n. 1, 15 gennaio 1939.

[4] P. SERGESCU. *Léonard de Vinci et les mathématiques.* in «L. de V. et l’expérience scientifique au seizième siècle». Presses Universitaires de France 1953. pp. 73-88.

[5] U. CISOTTI, *La matematica vinciana,* in «Leonardo da Vinci», Novara, Istit. Geografico De Agostini, 1956 (2a ediz.), pp. 201-204.

[6] Per un’analisi più minuziosa dei testi vinciani qui ricordati e di molti altri ancora cfr. A. MARINONI, *La teoria dei numeri frazionari nei manoscritti vinciani. Leonardo e Luca Pacioli,* in « Raccolta Vinciana », fasc. XX, pp. 111-196 e cfr. pure dello stesso *Le operazioni aritmetiche nei manoscritti vinciani,* in «Raccolta Vinciana», fasc. XIX, pp. 1-60.

In: “Periodico di Matematiche”, Bologna, 1968, serie IV, vol. XLVI, n.5 dicembre pp. 543-558

* * *

Cominciamo dalla pagina ricordata dal Sergescu (L 10v), Dopo aver enunciato il quoziente della divisione, Leonardo aggiunge «quest’è falso, imperò ch’egli è più 8/9 che non è 2/3; il che nel partire de’ rotti è impossibile che sia maggiore la somma del moltiplicato, che non è la cosa che si multiplica[7]. Onde direm così $\frac{3}{4} \overset{\text{via}}{\diagdown} \frac{2}{3}$ fa $\frac{6}{9}$ cioè $\frac{2}{3}$». Leonardo dunque ha moltiplicato i due termini del dividendo per il solo numeratore del divisore, e come risultato non può non riottenere il puro dividendo: conclusione superflua di un lavoro inutile e inconcludente. Lo strano è che Leonardo trovi preferibile questa conclusione («par che faccia meglio») al risultato esatto, tanto inconcepibile gli sembra che il quoto cresca in quantità rispetto al dividendo. Ma c’è un’altra pagina, sfuggita al Sergescu, che ci ripresenta le stesse idee in modo più ampio, più esplicito e con errori più gravi. «Se voi partire 2/3 per 3/4 l’ordinaria regola ti dà che tu debbi multiplicare in croce col dire “3 via 3 fa 9”, e poni 9 sotto il 3, il quale 9 fia partitore; poi per l’altra linia dirai: “2 vie 4 fa 8” e questo 8 fia il numero che si dÉpartire per 9: ch’è impossibile. Adunque resta nominato 8/9. Ma qui non s’intende di che, perché ogni cosa partita diminuisce di sua quantità, e questa è cresciuta nel partire, imperò ch’elli è maggiore numero 8/9 che non è 2/3, Adunque la regola non è molto chiara e però per altra via di $\frac{2}{3} \diagup \frac{3}{4}$, “2 vie 3 fa 6” e poni 6 sopra una riga, poi dirai “2 vie 4 fa 8” e poni questo 8 sotto essa riga e dirai 6/8, e qui trovi ch’elli è minore 6/8 che 2/3. E ancora poi dire $\frac{2}{3} \diagdown \frac{3}{4}$ “2 vie 3 fa 6” e poni 6 sopra una riga, poi di’ “3 vie 4, 12” e poni 12 tal sotto lo 8 e dirai 8/12 che è medesimamente minore che 2/3 ».

Si tratta di un problema che era probabilmente trattato nelle scuole degli abbachisti. Infatti Luca Pacioli nella sua *Summa de Aritmetica* si ferma a spiegare come mai dividendo per una frazione propria «sempre ne vien più che la quantità partita, di che per certo par stranio a ciascuno, la parte, quale è l’avenimento, esser maggiore del tutto. Sì commo a partire 1/2 per 1/3 ne ven 1 + 1/2, quale senza dubio è più e maggiore che none 1/2 », Ma subito spiega che 1/2 : 1/3 «interrogative voi dire: de 1/2 quanti terzi se ne faria?» e, così impostato il problema, appare evidente che 1/3 *entra* una volta e mezzo in 1/2, Ma non riusciamo onestamente ad attribuire a Leonardo lo stesso intento e la stessa impostazione. Dove il Pacioli dice «par stranio a ciascuno», Leonardo afferma un perentorio «quest’è falso» che condanna recisamente la regola «ordinaria» ed esatta, Al rigore del Pacioli si oppongono le continue incertezze di Leonardo (« par che faccia meglio», «non è molto chiara»): inoltre invece di condurre alla conferma della regola esatta, il discorso vinciano si disperde in procedimenti assurdi, che conducono a risultati diversi e perciò contraddittorii (col primo il

[7] Poiché il partire de’ rotti, ovvero la divisione del1e frazioni, avviene moltiplicando in croce l’uno per l’altro, ossia il primo per l’inverso del secondo, «la somma del multiplicato" significa il quoziente, «la cosa che si multiplica» è il dividendo: in altre parole, il quoto non può essere maggiore del dividendo.

quoto coincide col divisore, col secondo coincide col dividendo), eppure vengono ambedue dichiarati accettabili. Inoltre Leonardo non vede che moltiplicando i due termini della frazione per uno stesso numero, la frazione non cambia e conclude che 6/8 oppure 8/12 sono minori di 2/3. Questi errori possono sembrare eccessivi ed incredibili, se non pensiamo che erano comuni ai «sanza lettere» non rientrando le frazioni nel normale « far di conto». Dobbiamo dunque collocare Leonardo fra gli indotti, per quanto riguarda questo problema? A questa decisione ci spingono anche altri e non meno gravi argomenti.

Il f. 245 rb dell’Atlantico contiene una tabellina delle radici quadrate dei primi cinque numeri: di 1 è 1. di 2 è 2/2. di 3 è 3/3. di 4 è 4/4. di 5 è 5/5, La dimostrazione è fatta moltiplicando 2/2 per 2/2 che fa 4/2, ossia 2. Non basta. Nello stesso codice (f. 200r) si vede la tabella delle radici cubiche ampiamente e inequivocabilmente commentata.

«Radice cuba di 3 son 3/9... perché dicendo ‘3 noni vie 3 noni fa 9 noni, cioè un intero, e 3 volte 9 noni fa 27 noni, che son 3 interi’ adunque è vero che 3/9 è la radice cuba di 3. - Radice di 4 è 4/16. E dirai 4/16 vie 4/16 fa 16/16 cioè 1/0: e 4 via 16/16 fa 64/16, cioè 4/0». E si notino le scritture imprecise 1 /0, 4/0 invece di 1/1, 4/1 per indicare gli interi. Anche qui il discorso è troppo esplicito per dar luogo ad equivoci. Nel moltiplicare le frazioni Leonardo trascura il denominatore (almeno quando esso è comune). Egli è abituato a considerare $2\frac{1}{2}$ cioè $2+\frac{1}{2}$ come se fosse $\frac{2}{2}$, cioè $2x\frac{1}{2}$; confonde dunque la somma colla moltiplicazione e di fronte a $\frac{2}{2}x\frac{2}{2}$ oppure $\frac{4}{16}x\frac{4}{16}$ egli agisce come quando deve sommare due frazioni con denominatore comune. Infatti nel trascrivere il suo calcolo orale dice «e 3 volte 9 noni» e «4 via 4/16», trascurando il fatto che si tratta non di 3 o di 4, ma di $\frac{3}{9}$ e di $\frac{4}{16}$. É pure evidente che Leonardo non s’accorge che $\frac{2}{2},\frac{3}{3},\frac{4}{4},\frac{5}{5}$ rappresentano ciascuno l’unita e che uno sarebbe in definitiva la radice quadrata di tutti i numeri interi: e non si avvede che nel calcolo delle radici cubiche (riducibili alla serie $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$ … per i numeri 3, 4, 5 ..) si verifica una diminuzione della quantità delle radici proporzionale al crescere dei radicandi.

Il quadro delle lacune di Leonardo nel calcolo dei numeri frazionari si va dunque ampliando e non sembra possibile attribuire alle sue parole un’intenzione didattica particolare (una dimostrazione per assurdo appena impostata e non conclusa?) o significati ambigui quanto misteriosi. Tutto invece si può spiegare riconoscendo all’omo sanza lettere il diritto di non padroneggiare ancor bene il calcolo dei «rotti», allora riservato agli iniziati. Altri appunti vinciani confermano il nostro giudizio. Innanzitutto abbiamo la prova che Leonardo stesso riconobbe la sua insufficiente preparazione e invocò l’aiuto altrui. Infatti nel f. 120 rd dell’Atlantico egli scrisse: «Impara la multiplicazione delle radici da maestro Luca», ossia Luca Pacioli. Nelle tabelle che abbiamo esaminato, le «radici» sono rappresentate appunto da frazioni che, moltiplicate una o due volle per se stesse, ridanno il radicando. Leonardo dovette accorgersi dell’enorme errore commesso e

In: “Periodico di Matematiche”, Bologna, 1968, serie IV, vol. XLVI, n.5 dicembre pp. 543-558

ricorse per aiuto al Pacioli. Forse gliene parlò: certamente egli spese soldi «119 in Aritmetica di maestro Luca». Gli effetti benefici di questa decisione si vedono nei ff 69 a-b dell’Atlantico dove sono trascritte o riassunte dalle cc. 50-57 della *Summa de Aritmetica* le regole esatte per moltiplicare, sommare, sottrarre, dividere, nonché «infilzare» i rotti[8].

Anche queste trascrizioni dal libro del Pacioli confermano i nostri precedenti giudizi. Innanzitutto il carattere pedissequo delle trascrizioni la loro concisione che talvolta oscura il senso, qualche omissione o svista o errore di calcolo rendono evidente il carattere autodidattico di questi appunti. Tra essi inoltre e i brani precedentemente esaminati la frattura è netta, il capovolgimento completo, il che esclude la possibilità di riunire tutte queste osservazioni sulle frazioni e sulle radici in un disegno o progetto unitario per un trattatello di aritmetica, La volontà di scoprire in quasi tutti gli scritti vinciani i materiali o gli abbozzi per trattati di ogni specie è un pregiudizio ormai invecchiato. Le pagine in cui Leonardo scrive o trascrive dai libri per uso personale, sono più numerose di quanto un tempo non si credesse. Nel catalogo dei suoi libri che Leonardo registra nel ms. 8936 della Biblioteca Nazionale di Madrid a ff. 2v-3r, oltre all’Aritmetica di maestro Luca troviamo un «Libro d’Abaco del Sassetto», un «libro d’Abaco da Milano grande in asse», un «libro d’Abaco» prestato a Giovanni del Sodo, un «libretto vecchio di aritmetica» e il «libro da Urbino matematico». Che necessità e che possibilità aveva Leonardo di scrivere un altro trattatello, quando sembra evidente ch’egli non ha nulla da insegnare e molto da imparare? Egli non ha né la cultura matematica, né l’esperienza didattica del Pacioli. O vorremo ancora sostenere che Leonardo vagheggiasse una *Summa* ad uso degli scolari delle botteghe artigiane con un pizzico di latino, un pizzico di aritmetica tra cento altri ingredienti[9]?

I ff. 69 a-h dell’Atlantico sono riferibili all’anno 1502 circa, mentre il ms. L va dal 1497 al 1502. Diremo dunque che tra queste due date Leonardo imparò

---

[8] L’infilzamento dei rotti («De modo infilzandi fractos») non è una semplice somma di frazioni, come sembra dire il Marcolongo (Le *ricerche* ecc.. p. 10). É un’operazione particolare che si usa nel dividere un numero misto, come ad es. $20\frac{1}{4}$, per un numero intero, come ad es. 12. Invece di ridurre il dividendo a frazione impropria il Pacioli preferisce eliminarne una parte e così calcola $20\frac{1}{4} : 12 = 1 :$, un primo quoziente che viene accantonato. Successivamente si divide il resto $8\frac{1}{4} : 12 = \frac{11}{16}$, che si *infilzano* col quoziente 1 preventivamente accantonato, vale a dire $1\frac{11}{16}$, . Procedura un po’ prolissa ma charissima nella sua impostazione. Tuttavia essa dà luogo a scritture (almeno per noi e a prima vista) sconcertanti come questa $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$, Che oggi scriveremmo $2\frac{1}{4}$ il cui presupposto non dichiarato dovrebbe essere un’operazione come $11\frac{1}{4} : 3$, la quale scissa in due tempi darebbe un primo quoziente 3 da accantonare e la successiva divisione del resto $2\frac{1}{4} : 3$ darebbe il secondo quoziente $\frac{9}{12}$ o $\frac{3}{4}$ da infilzare col 3 già accantonato, ossia $3\frac{3}{4}$.

[9] L’uso delle frazioni è normale in Leonardo quando esegue le divisioni, il cui quoziente è spesso un numero misto (o addirittura si riduce a una frazione propria quando il dividendo è minore del divisore): ma l’unica operazione su numeri frazionari frequente in Leonardo consiste nel ridurli ai minimi termini, il più delle volte dimezzando successivamente numeratore e denominatore (come si vede ad es. nel calcolo delle piramidi ottiche, per cui cfr. A.MARINONI, *Le operazioni aritmetiche*… p. 47 sgg.).

In: “Periodico di Matematiche”, Bologna, 1968, serie IV, vol. XLVI, n.5 dicembre pp. 543-558

da maestro Luca la multiplicazione delle radici e le altre regole per operare coi numeri frazionari, ma bisogna aggiungere che il frutto di tanta lezione non pare evidente o copioso nelle carte da lui lasciate. É però interessante vedere come Leonardo procedeva nello studio delle frazioni.

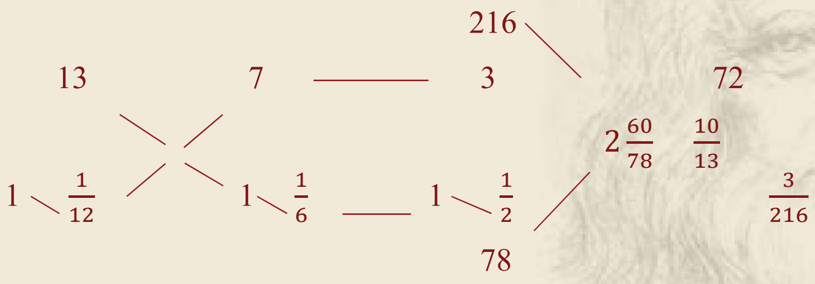
* * *

Sul verso del f. 69a si leggono le seguenti frazioni composte in una figura che richiede qualche spiegazione.

$$\frac{1}{12} >< \frac{1}{6} \qquad \begin{array}{c} 12 \\ \frac{1}{2} \\ 12 \end{array} \qquad \frac{12}{12} \qquad \text{cioè} \ \frac{1}{0}$$

Anche questa figura ha il suo modello nel Pacioli e serve per applicare la regola del tre a una triade di frazioni. Noi scriveremmo $\frac{1}{12}:\frac{1}{6}=\frac{1}{2}:\frac{12}{12}$, dove il quarto proporzionale è ottenuto col nostro metodo mediante la moltiplicazione dei medi e la divisione del prodotto per il primo estremo. Invece col metodo imparato da Leonardo, si elimina ogni distinzione tra medi ed estremi, seguendo le «linee del via» con un processo fluido e semplice. Partendo dal numeratore del primo termine e scendendo ai denominatori del secondo e terzo si moltiplica 1 x 6 x 2 = 12, che è il denominatore del quarto termine ricercato, mentre partendo dal denominatore del primo e salendo ai numeratori del secondo e terzo termine si moltiplica 12 x 1 x 1=12, il numeratore cercato. Dunque 12/12 cioè 1 (e non l/0, come Leonardo scrive a modo suo), Ma Leonardo non si accontenta della regola. Il suo spirito critico e il suo bisogno di certezza esigono una verifica sperimentale e perciò accanto alla figura aritmetica scrive: «Se 1/12 fussi 1/6 che sarebbe 1/2? Sarà 12/12 cioè 1/0» e prosegue « É come dir sopra 12 once: se una oncia fussi 2 once, che sarebon 6? Sarebbe una libra». In tal modo l’astrazione matematica è ancorata a un fatto concreto che ne costituisce la rappresentazione fisica e in certo modo la prova sperimentale. Un’oncia è infatti un dodicesimo di libbra. due once un sesto di 1ibbra, sei once mezza libbra. Con questo rapporto tra once Leonardo ha praticamente trasformato i quattro termini della proporzione in quattro frazioni aventi lo stesso denominatore 12, ed a questo punto egli elimina il denominatore comune e osserva la proporzione fra i soli numeratori considerati come numeri interi. Egli scrive infatti sopra la figura che abbiamo esaminato, quest’altra proporzione 1 2 6 | 12; dove si vede subito e senza calcoli che, come 2 è il doppio di l, così 12 è il doppio di 6. (Naturalmente perché si abbia nelle due proporzioni l’identico quarto proporzionale, occorre riesumare il denominatore soppresso 12/12, cioè 1).

Ora siamo certi che la regola è sicura e Leonardo vuol applicarla a frazioni più complesse. Procede per gradi conservando la triade prima considerata 1/12, 1/6, 1/2, ma aggiunge un’unità a ogni termine trasformandolo in numero misto, che poi trasforma in una frazione impropria.



L’interpretazione non è difficile. La linea diagonale che unisce ogni unità al denominatore indica la moltiplicazione di 1 x 12, che unito al numeratore dà il nuovo numeratore 13, di 1 x 6+1=7, di 1 x 2+1=3. I nuovi termini sono dunque 13/12, 7/6, 3/2. Per trovare il denominatore del quarto proporzionale si deve ora moltiplicare 13 x 6 x 2= 156. Purtroppo Leonardo dimentica di moltiplicare per 2 e si ferma a 13 x 6 = 78.

Per trovare il numeratore si deve moltiplicare 12 x 7 x 3=252. Anche qui Leonardo commette una svista. L’operazioncina scritta di fianco 72 x 3=216 rivela che Leonardo invece di moltiplicare 12 x 7=84, ha moltiplicato 12 x 6=72. Invece del risultato corretto $\frac{252}{156}$, cioè $1\frac{8}{13}$, Leonardo ottiene $\frac{216}{78}$, cioè $2\,\frac{10}{13}$.

Al di sopra di questa figura ne troviamo un’altra di semplici numeri interi 13 14 18 19 $\frac{5}{13}$, dove è facile riconoscere, collo stesso procedimento già usato per le once, i numeratori della triade $\frac{13}{12}\ \frac{7}{6}\ \frac{3}{2}$ trasformata in $\frac{13}{12}\ \frac{14}{12}\ \frac{18}{12}$. E anche qui perché il quarto proporzionale coincida, occorrerebbe ripristinare il denominatore 12 per cui $\frac{19\frac{5}{13}}{12} = 1\ \frac{8}{13}$; ciò che Leonardo non fa.

L’ingegnosa curiosità di Leonardo è confermata dalla successiva proporzione 3 4 8 10 $\frac{2}{3}$, che è ricavata dalla precedente 13 14 18 19 $\frac{5}{13}$, eliminando la cifra 1 delle decine nei primi tre termini, con un processo inverso a quello con cui, premettendo la cifra 1 alla proporzione base, si era costruita la proporzione $1\frac{1}{12}\ \ 1\frac{1}{6}\ \ 1\frac{1}{2}$. Che cosa sperava di concludere Leonardo? Di ritrovarsi al punto di partenza? Ciò non era possibile, perché l’eliminazione del denominatore altera il valore dei termini (altro è 14 altro $\frac{14}{12}$), Ma non dobbiamo fare il processo alle intenzioni, se queste non appaiono chiaramente definite: diremo solo che Leonardo sta provando e riprovando con una curiosità rivelatrice della sua scarsa conoscenza di questa parte dell’aritmetica, ma anche dell’acuta curiosità del suo spirito che in altri campi dà frutti più preziosi.

In: “Periodico di Matematiche”, Bologna, 1968, serie IV, vol. XLVI, n.5 dicembre pp. 543-558

* * *

Tralasciamo numerosi altri esempi di applicazione della regola del tre ai numeri frazionari e consideriamo un’altra curiosa figura che le frazioni assumono in Leonardo. Anche stavolta egli non applica l’ordinaria regola e segue un procedimento assai prolisso, che pur conduce a un risultato esatto. Fra i non pochi esempi esaminiamo quello del cod. Atl. 283 vd, che colle sue incertezze e i suoi lapsus meglio rivela lo sforzo dell’apprendista inesperto. «3/4 di che numero fia e 4/5? Tanto è a dire "Dammi e 3/4 di 4/5" quanto è a dire "3/4 di che numero fia e 4/5?". E tutto si fa per una regola.

$$\begin{array}{ccccc} \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & & & \begin{array}{c}12\\16\end{array} \\ b & 15 & 3\,\frac{3}{4} & & \frac{6}{8} \\ & 4 & & & \\ & & 4 & & \frac{3}{4} \\ & & a & & \end{array}$$

Il 4 di *b,* che discende in *a,* è posto in tal sito sol per denominatore delle figure di sopra la riga, che si debbono intendere essere 3 e $\frac{3}{4}$ di quarti, che si dè po’ fare di tutto questo sedicesimi, che son quarti di quarti; e ritroverai star tal regola nel suo vero essere… Di’ così: "3 via 5 fa 15". Partilo pel 4, che sta sopra il 5; ne verrà 3 e $\frac{3}{4}$. E questo 3 s’intende non 3 unità, ma 3 di que’ quarti primi, e pe’ segno di come el 4 che sta sotto il 3 mettera’ lo sotto il 3 e 3/4 e dirai che ne venga $\frac{3 \text{ e } \frac{3}{4}}{4}$ d’un d’essi quarti; onde riducerai esso 3 e $\frac{3}{4}$ a minor rotto, e dira’: “3 vie 4 fa 12”. Aggiugnili il 3 che sta sopra la riga e di’ “15/4 di quarti” cioè 15/16. Ora riduci tutta la tua proposta a essi sedicesimi e arai il tuo quisito essere 12/15, che vedi che 12 è veramente e 4/5 di 15. E ritornando a quarti, e 12/15 sarà 3/4, e 15/16 essere tre quarti interi e 3/4 di quarto. E sta bene ».

Si tratta semplicemente di dividere $\frac{3}{4} : \frac{4}{5}$. L’ordinaria regola direbbe di moltiplicare in croce e condurrebbe immediatamente al risultato 15/16, Leonardo invece procede lentamente e faticosamente per una via più lunga indicata dalle linee del via. Moltiplica il numeratore del dividendo per il denominatore del divisore 3 x 5, colloca il prodotto 15 sotto il divisore e sotto di esso trasporta il numeratore del divisore 4. Il risultato di questa divisione è scritto di fianco 3 $\frac{3}{4}$. Ma v’è ora da riprendere il denominatore del dividendo (*b*) che viene condotto sotto il quoziente ottenuto 3 $\frac{3}{4}$ (*a*) perché in effetti si tratta di quarti di quarti, cioè sedicesimi. Qui bisogna trasformare il $3\frac{3}{3}$ in $\frac{15}{4}$, che diviso per quattro diviene finalmente $\frac{15}{16}$. Ma Leonardo non è ancora soddisfatto di così lunga fatica. Egli vuole ora assicurarsi che tal regola stia «nel suo vero essere», che sia esatta ed efficiente. Ricorre allora all’espediente già osservato nel precedente paragrafo: la trasformazione del dividendo una frazione avente il denominatore comune a quello del quoto, così da poterlo ignorare e constatare nel rapporto dei soli numeratori che la regola «sta bene», è «nel suo vero essere». Nel caso nostro, concluso che $\frac{3}{4}:\frac{4}{5}=\frac{15}{16}$, Leonardo trasforma il «quesito» o «proposta» (ossia la frazione dividendo $\frac{3}{4}$) «in sedicesimi», ossia nella frazione equivalente $\frac{12}{16}$ (qui per un lapsus scrive «e arai il tuo quisito essere $\frac{12}{15}$ ») per poter opporre $\frac{12}{16}$ a $\frac{15}{16}$ e, trascurato il denominatore comune, constatare «che 12 è veramente e $\frac{4}{5}$ di 15 ». Il discorso sarebbe quindi finito, ma Leonardo vuol ritornare alla frazione iniziale: «E ritornando a quarti, e $\frac{12}{15}$ » (e ripete l’errore in luogo di $\frac{12}{16}$ ma l’operazione e scritta in colonna di fianco alla figura dimezzando due volte $\frac{12}{16}$ fino a giungere a $\frac{3}{4}$) sarà $\frac{3}{4}$ e $\frac{15}{16}$ essere tre quarti interi e $\frac{3}{4}$ di quarto». Quest’ultima espressione si chiarisce scrivendo semplicemente $\frac{15}{16}=\frac{12}{16}+\frac{3}{16}=\frac{3}{4}+\frac{3}{16}$

* * *

Lo stesso procedimento colla stessa figura ritorna in altre pagine vinciane. Nel cod. Arundel 221r la figura è ripresentata tre volte per le divisioni $5:\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=\frac{2\frac{2}{3}}{3}$, $\frac{3}{4}:\frac{4}{5}=\frac{15}{16}$. La prima divisione è così presentata:

$$\begin{array}{ccc} \frac{5}{1} & \frac{3}{4} & \\ & 20 & 6\,\frac{2}{3} \\ & 3 & \overline{1} \end{array}$$

Risolvi il 5 in el rotto resultato, e così il 6([10]), e troverrai 5 essere 15/3, el 6 essere 20/3, che, come vedi, 15/3 sono e 3/4 di 20/3; onde la regola è buona». Per la seconda divisione 2/3 : 8/9 dice che «2/3 dirà poi 6/9 »; ed è chiaro che $6=\frac{3}{4}$di 8.

Si conferma dunque che il procedimento mira a contrapporre fra loro i numeratori delle frazioni dividendo e quoto per accertare con immediata evidenza che non tanto il singolo risultato ma il principio teorico, la regola è buona. Il che significa che Leonardo ha dimestichezza coi numeri interi e non avendone una altrettale pei numeri frazionari, è condotto a trasferire quest’ultimi nell’ambito dei primi per verificare la validità del procedimento e l’inequivocabilità dei risultati. Un’ennesima prova della serietà di Leonardo, coerente con i suoi principi. anche se non esperto matematico.

[10] Si intenda $6\frac{2}{3}$

Nel f. 220v dello stesso codice troviamo ordinatamente disposte e incolonnate le divisioni $\frac{6}{2}:\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}$; $\frac{3}{4}:\frac{4}{5}$; $\frac{4}{5}:\frac{5}{6}$; $\frac{5}{6}:\frac{6}{7}$; $\frac{3}{5}:\frac{4}{9}$ e accompagnate ciascuna da un breve commento. Questa volta l'operazione non è inquadrata nella prolissa figura sopra esaminata in Atl. 283vd e Ar. 221r, ma è risolta sveltamente coll'ordinaria regola del multiplica in croce. Tuttavia la verifica è sempre eseguita col metodo della trasformazione del dividendo in frazione a denominatore comune col quoto. Tale denominatore è definito da Leonardo come *lo intero*. Ad esempio la divisione $\frac{3}{4}:\frac{4}{5}=\frac{15}{16}$ Leonardo commenta: «Qui lo 'ntero si è 16, e sua $\frac{3}{4}$ fia $\frac{12}{16}$, il qual $\frac{12}{16}$ fia e $\frac{4}{5}$ de $\frac{15}{16}$
Ma bisogna intendere per intero non 16 ma $\frac{16}{16}$. Il dividendo $\frac{3}{4}$ trasformato in sedicesimi è $\frac{12}{16}$ che è pari a $\frac{4}{5}\times\frac{15}{16}$ come $12=\frac{4}{5}\times 15$. Per la divisione $\frac{4}{5}:\frac{5}{6}=\frac{24}{25}$ il commento dice: «Qui lo 'ntero è 25» (ossia $\frac{25}{25}$) «e $\frac{4}{5}$ di 25 si è 20, il quale 20 è $\frac{5}{6}$ di $\frac{24}{25}$ ». Il fatto che il denominatore 25 ora compaia e scompaia significa che esso viene mentalmente trascurato. Noi scriveremmo $\frac{4}{5}=\frac{20}{25}$ e $\frac{20}{25}=\frac{5}{6}\times\frac{24}{25}$, ma per gli omini sanza lettere la scrittura $\frac{20}{25}=\frac{5}{6}\times\frac{24}{25}$ non ha un'evidenza così tangibile come $20=\frac{5}{6}$ di 24. É bensì vero che Leonardo ha scritto poco prima «come vedi $\frac{15}{3}$ sono e $\frac{3}{4}$ di $\frac{20}{3}$ », ma anche così scrivendo egli oblitera mentalmente il denominatore 3 e vede $15=\frac{3}{4}\times 20$: semplificazione assai più rapida delle altre possibili, come sarebbero $\frac{15}{3}$ (ovvero 5) $=\frac{3}{4}\times\frac{20}{3}=\frac{20}{4}=5$ oppure $\frac{15}{3}=\frac{3}{4}\times\frac{20}{3}=\frac{60}{12}$ e $\frac{60:4}{12:4}=\frac{15}{3}$ che sono procedimenti insueti per Leonardo.

* * *

La conclusione è che Leonardo per buona parte della sua vita si servì scarsamente dei numeri frazionari, limitandosi alla loro riduzione ai minimi termini, ma evitando di sommarli, sottrarli, moltiplicarli e dividerli. Per un certo tempo egli condivise il dubbio, comune ai sanza lettere, che l'ordinaria regola della divisione delle frazioni fosse «poco chiara », ma riuscì a chiarirla verso i cinquant'anni, sia imparando la lezione del Pacioli, sia accertandola con metodi personali consistenti soprattutto nella riduzione delle frazioni con denominatori diversi in frazioni a denominatore comune per meglio verificarne il rapporto col semplice rapporto tra i numeratori, ormai considerati come numeri interi. Questo ingegnoso procedimento non tanto ci fa sorridere, quanto ci fa apprezzare, su un piano morale prima che scientifico, l'assoluto bisogno di certezza, di palmare evidenza che sempre guidò il pensiero di Leonardo. Egli non si affidò all'autorità

di nessuno, neppure a quella del Pacioli e volle dimostrare a se stesso come e perché la regola «è buona ».
Se è vero che Leonardo solo verso i cinquant'anni imparò da maestro Luca la multiplicazione delle radici e a operare correttamente sui numeri frazionari, ci chiediamo quale uso egli fece in seguito di quegli insegnamenti. Qui siamo costretti ad esaminare criticamente le affermazioni entusiastiche fatte dal Marcolongo, secondo il quale basterebbe il f. 17v del codice Arundel per dimostrare l'abilità con cui Leonardo calcola frazioni e radici.
Si tratta di un teorema con cui Leonardo[11] trova, con elegante procedimento geometrico, il baricentro di una mensola avente forma di trapezio isoscele. Tracciata sulla base del trapezio la perpendicolare che lo divide in due esatte metà, Leonardo afferma che in essa perpendicolare deve cadere il baricentro ricercato. Per determinarlo congiunge due vertici opposti del trapezio con una linea che lo divide in due triangoli, che costituiscono rispettivamente uno e due terzi dell'intero. Quindi col1'incrocio delle mediane dei due triangoli ne trova i singoli baricentri *h* e *L*. Il segmento *hL* congiungente i due baricentri, determina il baricentro della mensola nel punto K in cui detto segmento taglia la perpendicolare o mediana del trapezio. Il segmento *hL* è diviso da K in modo che *hK* sta a *KL* nella proporzione inversa a quella dei due triangoli in cui vengono rispettivamente a giacere, cioè due e un terzo di h*L*. A questo punto, terminato il discorso geometrico, Leonardo introduce, esemplificando, dei valori numerici: «Se la mensola pesa 60, il triangolo *abd* pesa 36 e il triangolo *acd* pesa 24 e la linia *hL* è radice di 15 e 1/9 e divisa nella proporzione delli triangoli in punto K, che fia *LK* radice di 5 e 11/25 e *hK* radice di 2 e 94/225». Questi valori — commenta il Marcolongo[12] — «provano che egli fa speditamente e correttamente riduzione di frazioni, calcoli di radicali ... e provano la infondatezza di certi giudizi assoluti, fondati su esame di scritti appartenenti ai primi anni della gioventù e anche ai primi studi di Leonardo; come per esempio il seguente dello Schuster... *dies hängt mit seiner geringen mathematischen Schulung zusammen*».
Ma è proprio questo giudizio del Marcolongo che ci sembra troppo assoluto e affrettato. Innanzitutto il Marcolongo ignora o trascura i dati cronologici. Perchè retrodatare le cosiddette «incertezze di Leonardo» quando si tratta di gravissime lacune ed errori riscontrabili nella sua piena maturità? Come si può dire che le righe finali del teorema del trapezio provano che egli fa «speditamente» il calcolo dei radicali, quando le suddette righe ci presentano semplicemente i risultati di un calcolo che non sappiamo da chi sia stato eseguito, né come, né in quanto tempo? Noi sappiamo che le non poche pagine vinciane in cui si eseguono calcoli aritmetici, rivelano quasi sempre incertezze ed errori. Per il f. 17 dell'Arundel i calcoli mancano. Se essi furono eseguiti veramente da Leonardo, dovremmo riconoscere che nel 1508, sei anni dopo la lezione del Pacioli, Leonardo aveva compiuto dei notevoli progressi nel calcolo delle frazioni e dei radicali. Ma nel

---

[11] Non sappiamo però - si badi - se si tratta di uno scritto originale di Leonardo, oppure, come tanti altri, copiato o riassunto da testi altrui.
[12] R. Marcolongo, *Le ricerche*…, p.44

gruppo di pagine dell’Arundel scritte nel 1508 e a cui appartiene il f. 17, non mancano brani che Leonardo ha copiato o riassunto da altri libri. Nella *Summa* del Pacioli troviamo la fonte del f. 27r «Modo di trovare tutte le radice dè numeri geometricamente», e troviamo pure molti teoremi condotti collo stesso procedimento geometrico e conclusi con un’esemplificazione numerica a base di frazioni e di radici, come si vede nel teorema del trapezio. D’altra parte nel f. 11r, sempre coevo del f. 17r. noi possiamo ritrovare imprecisioni di linguaggio, che non potrebbero confermare i presunti progressi di Leonardo nel calcolo matematico. Di fronte ai numerosi fogli che dimostrano in Leonardo una modesta esperienza nel calcolo aritmetico, il f. 17 del codice Arundel non basta a dimostrare, come voleva il Marcolongo, un sicuro progresso compiuto da Leonardo, semmai, a cinquantasei anni. Il giudizio dello Schuster sulla limitata o scadente istruzione matematica ricevuta da Leonardo conserva dunque la sua piena validità.

A. MARINONI